

電磁 Aφ 法交流辺要素固有特性解析エラーの理論的解明

2023/07/11 JCEAM 久保

1. 電場 E の電磁 Aφ 法定式問題点と電場 E 法厳密解析理論

「ポアンカレ補題」より電磁 Aφ 法の電場 E は、定常の静的電場と非定常の動的電場から表示される。電磁場解析を除き汎用的数値解析では、定常の静的応答と非定常の動的応答に分離して計算シミュレーションする。定常解析を初期値として非定常解析のバリユエーションはあるが、定常と非定常を同時に解析する定式化は電磁場解析だけの方法で、一般的には寡聞にして聞いたことが無い。

$$E = -\text{grad}\phi - \dot{A} \rightarrow E = E_s + E_T \quad \text{定常電場 } E_s, \text{ 非定常電場 } E_T \quad (1)$$

$$E_s = -\text{grad}\phi \quad \text{定常(直流)渦無し電場} \quad E_T = -\dot{A} \quad \text{非定常(交流)渦電場} \quad (2)$$

ファラディ・マクスウェル式とポアンカレ補題 P2 より、

$$\text{rot}E = -\dot{B} \rightarrow \text{定常} : \text{rot}E = 0 \rightarrow E_s = -\text{grad}\phi, E_T = 0 \quad (3)$$

P2: $\text{rot}E = 0$ を満たすとき、3次元空間上にスカラー関数 $\phi(\mathbf{x})$ が存在して、 $E = E_s = -\text{grad}\phi$ が成り立つ。

電磁 Aφ 法と電磁 A 法辺要素定式問題点は、電気学会セミナー資料 13 頁に記述される。

「たとえば $a_2=a_3=0$ としてもよい→木・補木ゲージ、ただし行列の条件が悪化するのであまり使用されない」

電気学会セミナー資料 13 頁式の間違い(P2 に記述)を訂正する。

$$\text{rot}(A + \text{grad}\phi) = \text{rot}A \rightarrow \text{数学的に正しいが物理的に間違い} \quad (13 \text{ 頁式})$$

$$\text{rot}(\dot{A} + \text{grad}\phi) = \text{rot}\dot{A} \rightarrow \text{数学的・物理的に正しい} \quad (4)$$

磁場運動 $B=\text{rot}A$ は、定常・非定常とも渦運動であり、ポアンカレ補題 P2 が成り立たない。

電気学会セミナー資料 13 頁式は物理的に間違いである。物理的に間違った 13 頁式をベースした辺要素定式は、六面体辺要素比較検証資料に示す通り固有特性エラー結果である。

電磁 Aφ 法から電磁 A 法辺要素は、間違った(13 頁式)のストークス定理より辺要素を定式化しているが、A 法運動方程式(5)に示す通り左辺第 1 項は回転運動、第 2 項は速度運動、第 3 項は加速度運動を表している。

$$\frac{1}{\mu} \text{rot} \text{rot}A + \sigma \dot{A} + \epsilon \ddot{A} = J_0 \quad (5)$$

辺要素定は磁場回転運動をストークス定理により辺接線方向運動に変換して、電場保存式を陽に制約する。この線積分を辺一定の仮定は、低減積分の積分ランク落ちスプリアスエラー原因である。

電場 E 法節点要素では発散定理有限要素を Lagrange 未定乗数法により電場・電荷保存を制約して、Maxwell 電磁場方程式厳密解析のロバスト有限要素として定式化出来る。直交流解析は、直流解析(磁場 A 電場 Φ 法)結果と交流解析(電場保存電場 E 法)結果の重ね合わせにより計算できる。

電磁ベクトル A 法辺有限要素と電場 E 法電磁場厳密解析節点有限要素の理論定式化と検証を表示する。

	理論定式と固有特性検証	評価
電磁ベクトル A 法 辺有限要素	1)磁束 $B=\text{rot}A$ 保存式と Maxwell 方程式(1)と式(2)より電磁 A 法運動方程式を定式化する 2)ストークス定理により磁場回転場の境界辺接線成分を定式化する、要素辺接線成分の磁束保存従属関係を陽に仮定する 3)部分積分法により辺有限要素平衡行列を定式化する 4)辺要素固有特性解析の固有値と固有モードはエラー結果である	×
電場 E 法厳密解析 節点有限要素	1)Maxwell 方程式(1)式と式(2)より電場 E 法運動方程式を定式化する 2)部分積分法により節点有限要素平衡行列を定式化する 3)周波応答式について電場・電荷保存の発散定理を Lagrange 未定乗数法により制約して、厳密解析有限要素を陰定式化する 4)節点要素固有特性解析の固有値と固有モードは電磁場理論通りの結果である	○

2. 準定常電磁場解析

電磁 A 法の非定常(交流)運動方程式は次のように表される。

$$\frac{1}{\mu} \text{rotrot}A + \sigma \dot{A} + \varepsilon \ddot{A} = J_0 \rightarrow \text{rotrot}A + \mu \sigma \dot{A} + \mu \varepsilon \ddot{A} = \mu J_0 \quad (6)$$

光速を c とすれば、

$$\frac{1}{c^2} = \mu \varepsilon \rightarrow \mu \varepsilon \approx 0 \quad (7)$$

準定常電磁場解析は、電気学会セミナー資料 15 頁に記述される。

$$\text{rotrot}A + \mu \sigma \dot{A} + \mu \varepsilon \ddot{A} = \mu J_0 \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{rotrot}A + \sigma \dot{A} = J_0 \rightarrow \sigma = 0, \frac{1}{\mu} \text{rotrot}A = J_0 \quad (8)$$

電気伝導率 $\sigma=0$ の場合、準定常式は定常(直流)式に還元されることになる。電磁 A 法の非定常(交流)運動方程式(6)の周波数応答を次式に表示する。

$$\frac{1}{\mu} \text{rotrot}A + j\sigma\omega A - \varepsilon\omega^2 A = J_0 \quad (9)$$

二階電磁場周波数運動方程式(6)には光速 c 表示が無いので、意味不明な準定常解析を仮定しないで二階運動方程式を周波数応答解析出来る。

ガウス発散定理とストークス定理は、3次元応答を1次元応答に還元できる強力な数値解析技術である。有限要素解析の境界条件は、ガウス発散定理やストークス定理と Lagrange 未定乗数法により電磁場境界条件を高精度ロバストに制約できる。

電磁ベクトル A 法要素の定式化を整理する。

電磁ベクトル A 法運動方程式： $\frac{1}{\mu} \text{rot rot } A + \sigma \dot{A} + \epsilon \ddot{A} = J_0$ 辺要素定式		
$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } A$ 項の A 回転運動	$\sigma \dot{A}$ 項の A 速度運動	$\epsilon \ddot{A}$ 項の A 加速度運動
電磁ベクトル A 運動は、 <u>磁束発散定理とストークス定理</u> より $\int_V \text{div } B dv = \int_S B \cdot nds = \int_S \text{rot } A \cdot nds = \oint_C A \cdot ds = 0$ 線積分和は磁束保存式制約より一意従属	電磁ベクトル A 速度運動は 3 次元方向	電磁ベクトル A 加速度運動は 3 次元方向

電磁ベクトル A 法辺要素の致命的エラー内容は、

- ① 磁束保存の電磁 A 回転運動を陽に制約して、速度・加速度運動を無視している
電磁場応答(電磁 A の回転・速度・加速度運動)についての磁束保存制約ではない
- ② 辺要素辺中央定式から数値積分精度ランク落ちによりスプリアスゼロ固有値を内在する

上表の通り辺要素 A 回転運動の線積分より、磁束保存式制約より一意従属で決まる。ストークス定理の線積分は保存則を陽に制約するために、辺分布一定と仮定するので積分ランク落ちのスプリアスエラーとなる。 Maxwell 方程式の電磁 A 法電場・電荷保存式は、

$$\text{div } D = \rho \rightarrow E = -\dot{A} \rightarrow \text{div } \dot{A} = -\rho / \epsilon \quad (10)$$

電磁ベクトル A 法保存則は、電磁 A 磁束保存式と電磁速度 $\dot{A}$ の電荷保存式(10)を制約する。**電磁 A 法辺要素エラーは、電場 E 法発散定理有限要素により Maxwell 電磁場理論通りの厳密解析できる。**

Maxwell 電磁場方程式保存則を電磁 A 法と電場 E 法での定式化を要約する。

$$\text{div } D = \rho \rightarrow E = -\dot{A} \rightarrow \text{div } E = \rho / \epsilon, \text{div } \dot{A} = -\rho / \epsilon \quad (11)$$

要素タイプ	電荷・電場保存制約	磁束保存制約
電磁ベクトル A 法辺有限要素 ストークス定理により磁束 B を陽に一意従属の保存制約 この定理は磁場回転運動を記述し速度・加速度運動が含まれない	× $E = -\dot{A} \rightarrow \text{div } \dot{A} = -\rho / \epsilon$ の電場・電荷式は保存されない	△ A について一意従属を陽に自明解制約
発散定理電場 E 法節点有限要素 発散定理により電場 E と電荷 ρ を陰に保存制約	○ 発散定理・未定乗数法より電荷・電場は陰に保存制約	○ 電場保存から次式より磁束保存 $\text{rot } E = -\dot{B}$

ダイポールアンテナの場合、電線接地点に電流からの電荷量 Q がチャージされる。

$$I = dQ / dt, Q = \rho V \quad (12)$$

発散定理電場 E 法節点有限要素は周波数応答について電場・電荷保存を陰に制約しているが、電磁ベクトル A 法辺有限要素は磁場応答ではなく磁束発散式を陽に自明解制約する保存則エラーである。