

1. 節点有限要素と辺有限要素の固有特性検証問題

Maxwell 電磁場方程式より電磁 A 法と電場 E 法の特性方程式は、次のように定式化される。

$$\frac{1}{\mu} \text{rotrot} A + \sigma \dot{A} + \varepsilon \ddot{A} = 0 \quad \text{rot} E = -\text{rot} \dot{A} \rightarrow E = -\dot{A} \text{ と仮定} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\mu} \text{rotrot} E + \sigma \dot{E} + \varepsilon \ddot{E} = 0 \quad \text{Maxwell 方程式だけの定式化} \quad (2)$$

ここで、電磁伝導率は $\sigma = 0$ とする。周波数応答の電磁 A 法と電場 E 法の固有特性方程式(1)と式(2)は、有限要素節点法により次の様に表される。

$$[C_e] \left(\frac{1}{\mu}, -\varepsilon \omega^2 \right) \{\phi\} = \lambda \{\phi\} \quad (3)$$

$$[C_e] = \frac{1}{\mu} ([C_1] - [C_2]) - \varepsilon \omega^2 [C_3] \quad \text{右辺第 1 項は rotrot のベクトル恒等式} \quad (4)$$

$$[C_1] = \int_v \{B\}^T \{B\} dv \quad (5)$$

$$[C_2] = \int_v ([B_x]^T [B_x] + [B_y]^T [B_y] + [B_z]^T [B_z]) dv \quad (6)$$

$$[C_3] = \int_v [N]^T [N] dv \quad (7)$$

固有特性解析モデルは図 1 の正立方体、解析パラメータの真空電磁場物性と周波数応答 ω は下記に示す。

電磁場物性 : XYZ 三軸等方性

透磁率 : $\mu = 1.257e^{-7} N \cdot A^{-2}$

誘電率 : $\varepsilon = 8.854e^{-12} F \cdot m^{-1}$

電気伝導率 : $\sigma = 0.0$

応答周波数 : $\omega = 2\pi \times 1.0e6 Hz$

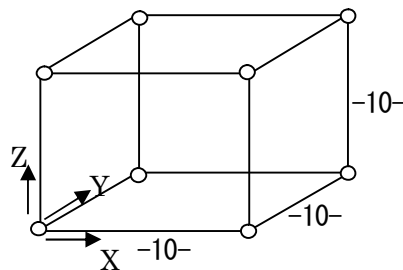


図 1 有限要素固有特性解析の検証モデル幾何形状

2. 節点有限要素と辺有限要素の固有特性解析比較検証

電磁 A 法・電場 E 法の節点要素と電磁 A 法辺要素の固有特性式(3)固有値は、次の通りである。

次数	六面体電磁 A 法節点要素の固有値 六面体電場 E 法節点要素の固有値	六面体電磁 A 法辺要素の固有値
1	4.85475D+03	2.74156D+08
2	4.85475D+03	8.22467D+08
3	4.85475D+03	8.22467D+08
4	4.36927D+04	8.22467D+08
5	4.36927D+04	1.06993D+09
6	4.36927D+04	1.06993D+09
7	8.85557D+05	2.41401D+09
8	8.85557D+05	2.41401D+09
9	8.85557D+05	2.41401D+09
10	2.65667D+06	2.46740D+09
11	2.65667D+06	2.46740D+09
12	2.65667D+06	2.46740D+09
13	2.65667D+06	
14	2.65667D+06	
15	2.65667D+06	
16	3.99229D+06	
17	3.99229D+06	
18	3.99229D+06	
19	3.99229D+06	
20	3.99229D+06	
21	3.99229D+06	
22	3.99229D+06	
23	3.99229D+06	
24	-7.94089D+06	
結果 評価	三重根ペア固有値分布は三軸等方体の 等方性理論の通り	三軸等方体の三重根ペア固有値エラー 固有値エラーはスプリアスゼロ固有値 の影響

[比較検証まとめ]

- 1)電磁 A 法と電場 E 法の節点要素固有特性解析は、理論通り三軸等方性三重根ペア固有値結果である。
- 2)電磁 A 法の辺要素固有特性解析は、三軸等方性三重根ペア固有値エラー結果である。
- 3)電磁 A 法の磁束保存式 $\text{div}D - \rho = 0 \rightarrow \text{div}A + \rho/\varepsilon = 0$ は、A・E 関係と時制矛盾を解決する必要がある。
電気学会「電磁場固有値解析検証資料」は、辺要素エラーを認識している故に電場 E 法節点要素で検証した。

電磁 A 法辺要素の有限要素定式は、理論的に間違ったエラー要素である。節点要素のゼロエネルギー固有値は理論解通り 6 個であるが、電磁 A 法辺要素のゼロエネルギー固有値は 7 個でスプリアスゼロ固有値を内在して、辺要素の三重根ペア固有値エラーの原因である。

Maxwell 電磁場方程式は、電気学会論文で提案した「発散定理有限要素法」により厳密に数値解析できる。