

## 1. Maxwell 方程式の電磁ベクトル A 法と電場 E 法の交流運動方程式

### 1) Maxwell 電磁場方程式の電磁ベクトル A 法と電場 E 法の運動方程式

Maxwell 電磁場方程式は、連立微分方程式(1)～式(4)で表される。

$$\begin{aligned} \text{rot}H &= J + \dot{D} && \text{アンペール・マクスウェル式} && (1) \\ \text{rot}E &= -\dot{B} && \text{ファラデー・マクスウェル式} && (2) \\ \text{div}B &= 0 && \text{磁束保存式：磁場には源がない} && (3) \\ \text{div}D &= \rho && \text{電荷保存式：電場の源は電荷である} && (4) \end{aligned}$$

「ポアンカレ補題」の電磁ベクトル A より磁束 B を次のように仮定する。

$$B = \text{rot}A \rightarrow B = \mu H \rightarrow H = (\text{rot}A) / \mu \quad (5)$$

式(5)を式(2)へ代入する。式(6)は、磁場は保存できるが、電場は保存できない。

$$\text{rot}E = -\text{rot}\dot{A} \rightarrow E = -\dot{A}, \dot{E} = -\ddot{A} \quad (6)$$

また、式(1)の電流密度 J を次のように仮定する。ここで、 $J_0$  は電線を通る電流密度を表す。

$$J = J_0 + \sigma E \quad (7)$$

式(1)～式(5)、式(6)、式(7)を代入して電磁ベクトル A 法の交流運動方程式が得られる。

$$\frac{1}{\mu} \text{rotrot}A + \sigma \dot{A} + \varepsilon \ddot{A} = J_0 \quad (8)$$

電磁ベクトル A 法の交流運動方程式は、ベクトル恒等式より式(3)の磁束保存式を満足するが、

$$\text{div}B = \text{divrot}A \rightarrow \text{divrot}A = 0 \rightarrow \text{div}B = 0 \quad (9)$$

電磁ベクトル A 法交流運動方程式(8)は、式(6)より電荷保存式は次式で表わされるので、Maxwell 方程式厳密解析には、磁束保存式(10)の解析変数・時制問題を解決する必要がある。

$$\text{div}D - \rho = 0 \rightarrow \text{div}\dot{A} + \frac{\rho}{\varepsilon}$$

直流と交流の磁場と電場の特徴的な基本運動は、Maxwell 電磁場方程式の考察と電磁ベクトル  $A$  ポテンシャル  $\phi$  についての「ポアンカレ補題」を参照して、次表の様に定式化できる。

|    | 磁場 $H$ 基本運動                                             | 電場 $E$ 基本運動                                               | 電磁場有限要素定式化                 |
|----|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------|
| 交流 | 渦運動: $\text{rot}\dot{H} = -\text{rot}\text{rot}E / \mu$ | 渦運動: $\text{rot}E = -\dot{B} = -\mu\dot{H}$               | 電荷厳密保存の電場 $E$ 法→対称行列       |
| 直流 | 渦運動: $\text{rot}H = \text{rot}\text{rot}A / \mu$        | 渦なし運動: $\text{rot}E = 0 \rightarrow E = -\text{grad}\phi$ | 電磁ベクトル $A$ ポテンシャル $\phi$ 法 |

## 2) 発散定理による電荷保存有限要素定式

図 1 の 8 節点六面体 Maxwell8 要素の補間関数は次のように表される。

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad \text{ここで、} i = 1 \sim 8, \xi, \eta, \zeta \text{ は要素正規化座標} \quad (12)$$

式(12)の補間関数から有限要素法定式により、六面体要素の要素特性行列と荷重項が計算される。

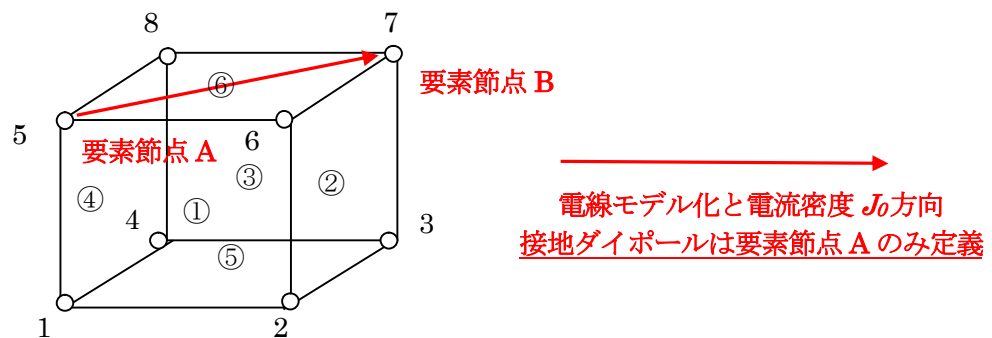
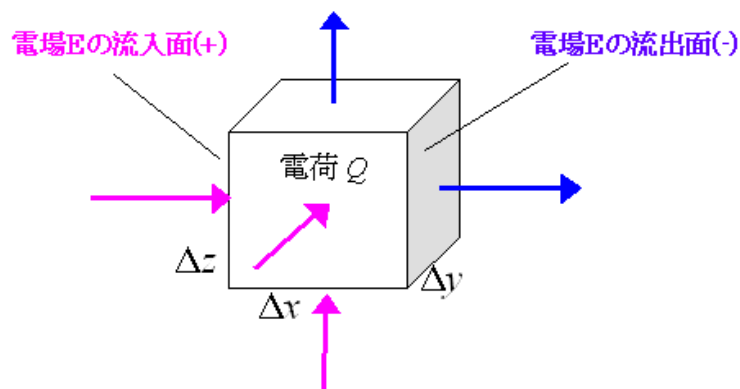


図 1 電線モデル付きの 8 節点六面体 Maxwell8 厳密解析有限要素

ガウス発散定理の境界積分式により電荷保存式(4)を表わし、電荷保存弱形式ベクトル条件式を有限要素補間式により定義する。電場・電荷が保存されると、磁場はファラデー・マクスウェル式(2)のベクトル恒等式から保存される。また、解析モデルの外部境界は、半無限領域への波動伝達境界となる。

$$\text{div}D = \rho \rightarrow \int_V \text{div}D dv = \int_V \rho dv \rightarrow \int_S E \cdot n ds = Q / \varepsilon \rightarrow \int_S [N_s]^T \{n\} ds \{E\} = Q / \varepsilon \rightarrow \{g\}^T \{E\} - Q / \varepsilon = 0 \quad (13)$$



### 3) Lagrange 未定乗数法による保存則制約平衡方程式

Lagrange 未定乗数法により電荷保存制約式を表わし、未定乗数  $\lambda$  を消去して要素行列と荷重項へ静的縮合する。静的縮合した要素行列と荷重項から、8 節点六面体有限要素 Maxwell 周波数応答式を組立てる。式(14)の電場  $E$  と未定乗数  $\lambda$  のポテンシャル式の変分極値から、電場  $E$  と未定乗数  $\lambda$  の連立方程式(16)を組み立てる。ペナルティ法により未定乗数  $\lambda$  を消去して、静的縮合より有限要素平衡方程式を定式化する。発散定理と Lagrange 未定乗数法より、Maxwell 電磁場方程式(1)～式(4)を厳密解析できる有限要素を定式化する。

$$L(E, \lambda) = \frac{1}{2} E^T C_e E + \lambda (g^T E - Q / \varepsilon) \quad \text{右辺第 1 項は周波数応答式、第 2 項は電荷保存式} \quad (14)$$

$$\delta L = \delta E^T (C_e E + g \lambda) + \delta \lambda (g^T E - Q / \varepsilon) = 0 \quad \leftarrow \text{変分の極値を取る} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} C_e & g \\ g^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q / \varepsilon \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} C_e & g \\ g^T & -1/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q / \varepsilon \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \alpha g^T E - \alpha Q / \varepsilon \quad (16)$$

$$[C_e + \alpha g g^T] \{E\} = (\alpha Q / \varepsilon) \{g\} \quad [C_e + \alpha g g^T] \text{ は発散定理周波数応答マトリックス} \quad (17)$$

ここで、 $\alpha$  は未定乗数  $\lambda$  を消去するためのペナルティ係数を表し、有限要素行列の実部に適用する。

## 2. 厳密解析の有限要素定式

### 1) 発散定理による交流電場 E 法有限要素定式

電場 E 法交流運動方程式(11)の周波数応答式、発散定理より電荷保存式(4)弱形式は、次の様に表される。

$$\frac{1}{\mu} \text{rotrot} E + j \omega \sigma E - \omega^2 \varepsilon E = -j \omega J_0, \text{div} D = \rho \rightarrow \{g\}^T \{E\} - Q / \varepsilon = 0 \quad (18)$$

周波数  $\omega$  応答の電磁場平衡方程式の有限要素定式は次のように表される。ここで、有限要素内の電磁物性値は一定と仮定することで、微分演算子の積分演算の外側に物性値が作用する。

$$[C_e + \alpha g g^T] \{E\} = \{J_0\} \quad [\alpha g g^T] \text{ は電場保存制約マトリックス} \quad (19)$$

## 2) 電磁 A φ 法の直流有限要素定式

電磁 A φ 法により直流磁場運動方程式と電荷保存式は次のように表される。

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } A = J_0 + \sigma E \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{rot rot } A + \sigma \text{grad } \phi = J_0 \quad (26)$$

$$\text{div } D = \rho \rightarrow \text{div grad } \phi = -\rho / \varepsilon \quad (27)$$

直流電磁場の電磁 A φ 法有限要素定式は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} C_A & C_{A\phi} \\ 0 & C_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{J}_0 \\ -Q/\varepsilon \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$[C_A] = \frac{1}{\mu} ([C_1] - [C_2]) \quad (29)$$

$$[C_1] = \int_V \{B\}^T \{B\} dv \quad (30)$$

$$[C_2] = \int_V ([B_x]^T [B_x] + [B_y]^T [B_y] + [B_z]^T [B_z]) dv \quad (31)$$

$$[C_{A\phi}] = \sigma \int_V [N_A]^T [\text{grad } N_\phi] dv \quad (32)$$

$$[C_\phi] = \int_V [\text{grad } N_\phi]^T [\text{grad } N_\phi] dv \quad (33)$$

電磁ポテンシャル φ の電荷規定拘束することで、系の特異性が除かれ正則化される。

### 参考資料 1 : Maxwell8 要素定式化の要旨説明

- 1) 辺要素固有特性式(1)、発散定理の節点要素固有特性式(2)
- 2) ガウス発散定理の有限要素電場保存式(13) ↑
- 3) Lagrange 未定乗数法の電場保存制約定式(14)～式(17)→式(2)
- 4) 電磁 A 法辺要素が節点有限要素であれば、3.2)節の通り三軸等方性三重根ペアの固有値結果となる。  
電磁 A 法辺要素の有限要素定式は理論的エラーであるので、Maxwel8 要素により対策する。