

六面体辺有限要素エラーと発散定理節点要素理論特性の固有特性解析による比較検証

2023/07/09 JCEAM 久保、湯山、 μ TEC 野島

1. 電磁場要素固有特性比較検証の問題設定

電磁場周波数応答の固有特性解析は次式で表される。

$$[C_h(\frac{1}{\mu}, -\varepsilon\omega^2)]\{\phi\} = \lambda\{\phi\} \quad \text{電磁 A 法辺要素}(\mu \text{ TEC, 電気学会}) \quad (1)$$

$$[C_e(\frac{1}{\mu}, -\varepsilon\omega^2) + \alpha g g^T]\{\phi\} = \lambda\{\phi\} \quad \text{発散定理電場 E 法節点要素 (JCEAM)} \quad (2)$$

$[C_h]$ は辺要素と $[C_e]$ は節点要素の周波数応答マトリックス、 $[\alpha g g^T]$ は発散定理の電場保存制約マトリックスを表わしている。有限要素定式については、「Maxwell 電磁場方程式の発散定理有限要素法による厳密解析理論説明書」式(18)～式(25)に記述した。電磁 A 法辺要素を発散定理電磁 A 法節点要素に定式化すると、発散定理電場 E 法節点要素と同等の有限要素となるが、電場保存発散式 $\text{div}E = -\text{div}\dot{A} \rightarrow \text{div}E = -j\omega\text{div}A$ は虚数式となり、複素数固有特性問題になる。式(1)と式(2)の $\{\phi\}$ 固有モードと λ 固有値について、辺要素と発散定理節点要素に関して比較検証する。

六面体辺要素固有特性解析の固有モードと固有値は、電磁場理論のエラー結果である。発散定理節点要素の固有特性解析は、電磁場理論通りの固有モードと固有値結果である。辺要素の固有値エラーと固有モードエラーは有限要素固有特性として、電磁場解析でも応答結果エラーとして直接影響する。六面体辺要素エラーと散定理節点要素理論特性について、解析結果を分析して考察する。

固有特性検証モデルは図 1 の正立方体、解析パラメータの真空電磁場物性と周波数応答 ω は下記に示す。

電磁場物性：XYZ 三軸等方性

透磁率： $\mu = 1.257e^{-7} N \cdot A^{-2}$

誘電率： $\varepsilon = 8.854e^{-12} F \cdot m^{-1}$

電気伝導率： $\sigma = 0.0$

応答周波数： $\omega = 2\pi \times 1.0e6 \text{ Hz}$

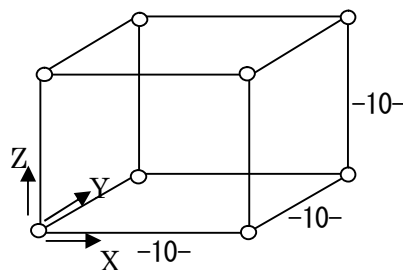


図 1 有限要素固有特性解析の検証モデル幾何形状

2. 六面体辺要素と節点要素の固有モード特性比較検証

2.1) 辺要素固有モード特性の磁束保存エラー検証

辺要素固有特性式(1)の固有モード発散・ストークス定理式による磁束保存検証は、エラー結果である。

=== Divergence theorem run time log : 20230518 095902 by F.Kubo ===

$$\int \phi \cdot nds = \int \phi \xi ds + \int \phi \eta ds + \int \phi \zeta ds$$

Mode= 1	Div. test=	-1.02945D-10	-3.77864D-11	3.80251D-13	-6.55392D-11
Mode= 2	Div. test=	2.14235D-09	2.15867D-09	-4.19526D-11	2.56378D-11
Mode= 3	Div. test=	1.90920D-10	1.98622D-10	-3.87745D-12	-3.82385D-12
Mode= 4	Div. test=	-1.62840D-09	-3.13041D-11	-1.60540D-09	8.30759D-12
Mode= 5	Div. test=	-4.41834D-09	-2.40445D-09	-2.00547D-09	-8.42035D-12
Mode= 6	Div. test=	-2.87403D-10	-5.51503D-12	-2.83334D-10	1.44607D-12
Mode= 7	Div. test=	4.66254D-08	8.95989D-10	4.59653D-08	-2.35921D-10
Mode= 8	Div. test=	9.58759D-09	9.69771D-09	-1.87859D-10	7.77479D-11
Mode= 9	Div. test=	-3.19856D-08	-3.23552D-08	6.29280D-10	-2.59640D-10
Mode= 10	Div. test=	1.01436D+02	1.95001D+00	1.00000D+02	-5.13777D-01
Mode= 11	Div. test=	9.88558D+01	1.00000D+02	-1.94589D+00	8.01706D-01
Mode= 12	Div. test=	9.97378D+01	-7.91408D-01	5.29209D-01	1.00000D+02

←発散定理式ゼロ自明解エラー
磁束保存は見かけ上でエラー

←磁束保存エラーである
辺要素ペナルティ係数の影響

[辺要素固有モードの磁束保存エラー分析]

1次～9次の固有モード磁束は見かけ上保存されるが、辺要素 ξ 直交断面、 η 直交断面、 ζ 直交断面について固有モード発散定理式より磁束保存を検証すると、

$$\begin{aligned} \int_V \text{div} \phi dv &= \int_S \phi \cdot nds \rightarrow \int_S \phi \cdot nds = \int_{S_\xi} \phi_\xi ds + \int_{S_\eta} \phi_\eta ds + \int_{S_\zeta} \phi_\zeta ds \\ &\approx 0 + 0 + 0 \rightarrow \int_S \phi \cdot nds \approx 0 \rightarrow \int_V \text{div} \phi dv \approx 0 \end{aligned} \quad (3)$$

有限要素固有モードの磁束保存発散定理式は、次の様に表される。

$$\int_V \text{div} \phi dv = \int_S \phi \cdot nds = 0 \quad \text{電磁ベクトル A の物理的意味 : } \text{rot} E = -\text{rot} \dot{A} \rightarrow E = -\dot{A} \quad (4)$$

発散定理式(4)より辺要素発散定理の境界積分式(3)が定式化される。式(3)は見かけ上磁束保存されるが、ゼロ自明解による発散非連続エラーである。辺要素は発散定理と発散式に違反して、磁束保存は見かけ上で解析エラーである。また、10次～12次はモードが異なり磁束保存されない。

2.2) 節点要素固有モード特性の電場保存理論検証

節点要素固有特性式(2)の固有モード要素図心での発散式(強形式)による電場保存検証は、電磁場理論通りの結果である。

=== Divergence test run time log : 20230403 0630 by JCEAM F.Kubo ===

$$\text{div} \cdot \phi = d(\phi x)/dx + d(\phi y)/dy + d(\phi z)/dz$$

Mode= 1	Div. test=	-2.71484D-16	-1.62094D-08	-5.31087D-09	2.15203D-08
Mode= 2	Div. test=	-2.04697D-16	8.07810D-09	3.84135D-08	-4.64916D-08
Mode= 3	Div. test=	1.04083D-16	-3.17201D-08	7.25306D-09	2.44670D-08
Mode= 4	Div. test=	-2.81025D-16	-5.11870D-09	-1.58245D-08	2.09432D-08

←電磁場理論通り電場保存の
固有モード発散 $\text{div} \Phi = 0$

```

Mode= 5 Div. test= 2.86229D-16 -3.90724D-09 -2.32278D-08 2.71351D-08
Mode= 6 Div. test= 2.47198D-17 -2.23511D-08 1.28615D-08 9.48960D-09
Mode= 7 Div. test= 3.46945D-17 -7.32733D-09 -5.77396D-09 1.31013D-08
Mode= 8 Div. test= -7.97973D-17 -8.07045D-10 4.08026D-10 3.99020D-10
Mode= 9 Div. test= -3.90313D-18 -1.49179D-09 -1.44359D-09 2.93538D-09
Mode= 10 Div. test= -1.04083D-16 5.24088D-08 -4.39360D-08 -8.47284D-09
Mode= 11 Div. test= 4.85723D-17 1.42973D-07 -2.83670D-08 -1.14606D-07
Mode= 12 Div. test= -1.01915D-17 2.42686D-08 -1.40117D-08 -1.02570D-08
Mode= 13 Div. test= -6.54858D-17 -6.46535D-08 7.17915D-08 -7.13805D-09
Mode= 14 Div. test= 1.72605D-16 -1.16669D-07 1.93803D-08 9.72890D-08
Mode= 15 Div. test= -2.57498D-18 1.20789D-08 -1.06252D-08 -1.45376D-09
Mode= 16 Div. test= 5.55112D-17 3.33550D-02 1.10688D-01 -1.44043D-01
Mode= 17 Div. test= -9.36751D-17 2.11389D-02 -3.63766D-02 1.52376D-02
Mode= 18 Div. test= -2.49366D-17 -9.04150D-02 8.86172D-02 1.79784D-03
Mode= 19 Div. test= 2.08167D-17 -7.79280D-02 1.59860D-02 6.19420D-02
Mode= 20 Div. test= 3.81639D-17 6.06118D-02 -5.78355D-02 -2.77632D-03
Mode= 21 Div. test= 5.55112D-17 1.71744D-02 -1.55313D-02 -1.64311D-03
Mode= 22 Div. test= 4.16334D-17 3.09812D-02 -1.98237D-02 -1.11575D-02
Mode= 23 Div. test= -1.66533D-16 4.44619D-02 3.34035D-03 -4.78023D-02
Mode= 24 Div. test= -6.00000D-01 -2.00000D-01 -2.00000D-01 -2.00000D-01

```

←24次は未定乗数法ペナルティ係数
αの影響、スプリアスエラーではない

【節点要素固有モードの電場保存理論分析】

1次～23次固有モードの要素図心電場発散はゼロであり、電場は電磁場理論通りに保存される事を発散式と発散定理から検証される。固有モード24次は電場保存制約マトリックス[agg^T]のLagrange未定乗数法ペナルティ係数αの影響によるもので、スプリアスエラーではない。

3. 六面体辺要素と節点要素の固有値特性比較検証

3.1) 辺要素固有値特性の三重根エラー検証

辺要素固有特性式(1)の固有値三重根エラーについて分析する。

```

=== Maxwell edge element eigen, iteration number=== 5
Eigen value id= 1 2.74156D+08 2.63523D+03 (Hz)
Eigen value id= 2 8.22467D+08 4.56435D+03 (Hz) ←三軸等方体の三重根ペア固有値エラーである
Eigen value id= 3 8.22467D+08 4.56435D+03 (Hz) ←固有値エラーはスプリアスゼロ固有値の影響である
Eigen value id= 4 8.22467D+08 4.56435D+03 (Hz)
Eigen value id= 5 1.06993D+09 5.20592D+03 (Hz)
Eigen value id= 6 1.06993D+09 5.20592D+03 (Hz)
Eigen value id= 7 2.41401D+09 7.81970D+03 (Hz)
Eigen value id= 8 2.41401D+09 7.81970D+03 (Hz)
Eigen value id= 9 2.41401D+09 7.81970D+03 (Hz)
Eigen value id= 10 2.46740D+09 7.90569D+03 (Hz)
Eigen value id= 11 2.46740D+09 7.90569D+03 (Hz)
Eigen value id= 12 2.46740D+09 7.90569D+03 (Hz)

```

【辺要素固有値のエラー分析】

三軸等方性の三重根ペア固有値が、疎らに分布するエラーである。物理的なゼロ固有値は正則化されるが、非物理的なスプリアスゼロ固有値は正則化できないので、辺要素の系に潜在する。辺有限要素計算のξ直交断面のガウス積分ηζは2x2点とξは1点の選択的低減積分ランク落ち誤差エラー、η断面とζ断面も同様である。辺要素固有値エラーは、ランク落ち原因のスプリアスゼロ固有値と実固有値との連成が原因である。

★電磁 A 法辺要素が節点有限要素であれば、3.2)節の通り三軸等方性三重根ペアの固有値結果となる。従って、電磁 A 法辺要素の有限要素定式は、理論的エラー間違がある。

3.2)節点要素固有値特性の三重根理論検証

節点要素固有特性式(2)の固有値について理論分析する。

```
MAXWEL8 element eigen problem-01, iteration number= 9
Eigen value id= 1 4. 85475D+03 1. 10893D+01 (Hz) ←三重根ペア固有値分布は、等方体の等方性理論通り
Eigen value id= 2 4. 85475D+03 1. 10893D+01 (Hz)
Eigen value id= 3 4. 85475D+03 1. 10893D+01 (Hz)
Eigen value id= 4 4. 36927D+04 3. 32679D+01 (Hz)
Eigen value id= 5 4. 36927D+04 3. 32679D+01 (Hz)
Eigen value id= 6 4. 36927D+04 3. 32679D+01 (Hz)
Eigen value id= 7 8. 85557D+05 1. 49771D+02 (Hz)
Eigen value id= 8 8. 85557D+05 1. 49771D+02 (Hz)
Eigen value id= 9 8. 85557D+05 1. 49771D+02 (Hz)
Eigen value id= 10 2. 65667D+06 2. 59411D+02 (Hz)
Eigen value id= 11 2. 65667D+06 2. 59411D+02 (Hz)
Eigen value id= 12 2. 65667D+06 2. 59411D+02 (Hz)
Eigen value id= 13 2. 65667D+06 2. 59411D+02 (Hz)
Eigen value id= 14 2. 65667D+06 2. 59411D+02 (Hz)
Eigen value id= 15 2. 65667D+06 2. 59411D+02 (Hz)
Eigen value id= 16 3. 99229D+06 3. 18003D+02 (Hz)
Eigen value id= 17 3. 99229D+06 3. 18003D+02 (Hz)
Eigen value id= 18 3. 99229D+06 3. 18003D+02 (Hz)
Eigen value id= 19 3. 99229D+06 3. 18003D+02 (Hz)
Eigen value id= 20 3. 99229D+06 3. 18003D+02 (Hz)
Eigen value id= 21 3. 99229D+06 3. 18003D+02 (Hz)
Eigen value id= 22 3. 99229D+06 3. 18003D+02 (Hz)
Eigen value id= 23 3. 99229D+06 3. 18003D+02 (Hz)
Eigen value id= 24 2. 67123D+13 8. 22576D+05 (Hz)
```

[節点要素固有値の理論分析]

三軸等方性体の三重根ペア固有値分布は理論通りである。24 次固有値は、電場保存拘束のペナルティ係数 α の影響による十三乗の超高次モードであるので、電磁場応答へは実効的に影響しない。24 次固有値はスプリアスエラーではない。

4. 六面体辺要素と節点要素の固有特性比較検証結果

電磁場有限要素の固有特性比較検証結果を要約する。

	電磁ベクトル A 法辺有限要素	発散定理の電場 E 法節点有限要素
電場固有モード	ゼロ自明解の磁束保存エラー 発散定理に違反する	発散式ゼロより電場は保存される 発散定理通りに電場は保存される
場固有値	三重根ペアが疎らな固有値エラー 三軸等方性理論に違反する	三重根ペア固有値が分布する 三軸等方性理論通りの固有値である

発散定理の電場 E 法節点有限要素は、Maxwell 電磁場理論から百年を経て、初めて電磁場厳密解法理論と電場・磁場・電荷保存する有限要素を東工大セミナー・JCEAM おいて開発した。電磁 A 法辺要素の有限要素法エラーは、比較検証固有特性解析の固有モードと固有値致命的エラーについて理論的に解明した。発散定理ロバスト電場 E 法節点要素による電磁場解析ソルバーの研究開発普及は喫緊課題である。