

電磁ベクトルポテンシャル $A\phi$ は周波数 ω の非定常交流電場 A と定常直流電場 $-\text{grad}\phi$

2023/10/31 JCEAM 久保、湯山

電磁ベクトルポテンシャル $A\phi$ は数学的指定か何らかの物理量かの議論は解決していない。「ポアンカレの補題 P1」より、電磁ベクトル A 法の磁束 B_A と非定常の磁束速度 $\dot{B}_A$ は次式で仮定する。

$$B_A = \text{rot}A \rightarrow \dot{B}_A = \text{rot}\dot{A} \quad (1)$$

「ファラデー・マクスウェル式」より、電場 E 法の非定常の磁束速度 $\dot{B}_M$ は電場回転 $\text{rot}E$ より次のように表示される。

$$\dot{B}_M = -\text{rot}E \quad (2)$$

磁束速度式(1)と式(2)より $\dot{B}_A = \dot{B}_M$ 、周波数 ω の応答における電磁 A と電場 E の関係式は次の様に表される。

$$\text{rot}\dot{A} = -\text{rot}E \rightarrow \dot{A} = -E \rightarrow j\omega A = -E \rightarrow A = \frac{j}{\omega} E \quad (3)$$

式(3)の電磁ベクトル A は、非定常の交流電場 E を周波数 ω の応答に換算した物理量である。ポアンカレ指摘の通りに、電磁 A と電場 E は 3次元ベクトル空間上のベクトル値関数である。

電磁ベクトルポテンシャル $A\phi$ 法の電場 E_{st} は、「ファラデー・マクスウェル式(2)」に式(1)を代入して「ポアンカレの補題 P2」より、渦無し運動の定常電場 E_s と渦運動の非定常電場 E の和で表される。

$$E_{st} = -\text{grad}\phi - \dot{A} \rightarrow E_{st} = E_s + E : E_s = -\text{grad}\phi, E = -\dot{A} \Rightarrow \text{式(3)} \quad (4)$$

式(4)のポテンシャル勾配 $-\text{grad}\phi$ は、定常の直流電場 E_s に対応した物理量である。

電磁ベクトルポテンシャル $A\phi$ の物理的意味は式(3)と式(4)より次の通り。

電磁ベクトル A : $A = \frac{j}{\omega} E$	A は周波数 ω の非定常電場ベクトル、 E は交流電場ベクトル
電磁ポテンシャル ϕ : $E_s = -\text{grad}\phi$	ϕ は定常の静電ポテンシャル、 E_s は直流電場ベクトル

電磁ベクトル A 法は電場 E 法を周波数 ω の変換した等価定式なので、汎用 AE 法として統一理論化した。汎用 AE 法ロバスト有限要素 **Maxwel8** を開発し、電磁ベクトル A 法辺要素と比較検証して当該論文を発表した。

当該論文: 発散定理による交流電場 E 法電磁場厳密解析有限要素から見た辺要素固有特性解析についての緊急検証 [電気学会 2022 年]

[汎用 AE 法ロバスト有限要素の特徴と長所]

- 1) 電磁 $A\phi$ 法の A は周波数 ω の交流電場ベクトル、 ϕ 勾配 $-\text{grad}\phi$ は直流電場ベクトルを表す。
- 2) 交流と直流は同時に直交流解析できないので、個別に解析して結果を重ねあわせる。
- 3) 電磁 A 法辺要素の **FEM** パッチテスト致命的エラーは、ストークス定理境界積分による電磁 A 保存定式が原因である。汎用 AE 法節点要素は、電場・電荷・磁束を厳密に保存するロバスト電磁場有限要素である。

補足説明：電気学会セミナー資料(2015年12月15日)は、電磁ベクトルポテンシャル A_ϕ を測定できない量としているが間違いである。定常の直流電場 E_s と非定常の交流電場 E を観測し、 E_s は直流電場 $E_s = -\text{grad } \phi$ と E は交流電場 $A = jE/\omega$ より、直流電磁場解析結果と周波数 ω 交流電磁場解析結果から比較検証できる。

電気学会セミナー資料の電磁 A 法辺要素と提案する汎用 AE 法節点要素について、有限要素法基本検証問題により要素固有特性を比較検証した(詳細資料：電磁ベクトル A 法辺要素と汎用 AE 法電場保存節点要素の比較検証評価)。

固有値特性パッチテスト： 三軸等方性体固有値の理論解は三重根ペア

固有モード特性パッチテスト： 電場保存固有モードの理論解は電場モード発散ゼロ

電磁場周波数応答の有限要素固有特性解析は次式で計算される。

$$[C_a(\frac{1}{\mu}, -\varepsilon\omega^2)]\{\phi_A\} = \lambda_A \{\phi_A\} \quad \text{電磁ベクトル A 法辺要素} \quad (5)$$

$$[C_{ae}(\frac{1}{\mu}, -\varepsilon\omega^2) + \alpha g g^T]\{\phi_{AE}\} = \lambda_{AE} \{\phi_{AE}\} \quad \text{汎用 AE 法電場保存節点要素} \quad (6)$$

$[C_a]$ と $[C_{ae}]$ は電磁 A 法辺有限要素と汎用 AE 法節点有限要素の周波数応答要素マトリックス、 $[\alpha g g^T]$ は発散定理有限要素法の電場保存制約要素マトリックスを表わしている。汎用 AE 法と電磁 A_ϕ 法の物理属性は、式(3)と式(4)から電場 E であるので電場・電荷保存式が電磁場解析理論精度の肝である。汎用 AE 法固有特性式(6)の $[\alpha g g^T]$ 電場保存制約マトリックスは、有限要素境界面からの電場流入流出総和をゼロに拘束する電場保存応答制約行列を表している。

汎用 AE 法節点要素と電磁 A 法辺要素の固有モード電場保存発散式は次式で表される。

$$\text{div} E = 0 \rightarrow \text{div} \phi_{AE} = 0, \quad \text{div} E = 0 \rightarrow \text{div} A = 0 \rightarrow \text{div} \phi_A = 0 \quad (7)$$

電磁 A 法辺要素と汎用 AE 法節点要素の固有値特性検証は、1 次～12 次について比較した。

	電場固有値 λ_A, λ_{AE} 三軸等方性三重根の特性検証
電磁 A 法辺要素	1 次～12 次：単根、三重根、二重根、三重根、三重根順の理論解エラー
汎用 AE 法節点要素	1 次～12 次：全て三重根の理論解通り

電磁 A 法辺要素と汎用 AE 法節点要素の固有モード発散特性は次の通り。

	電場固有モード ϕ_A, ϕ_{AE} 発散ゼロの電場保存特性検証
電磁 A 法辺要素	1 次モード： $\text{div} \phi_A^1 = 1.56 (= 0.57_x - 0.01_y + 1.00_z)$ 12 次全ては理論解エラー
汎用 AE 法節点要素	1 次モード： $\text{div} \phi_{AE}^1 = 0.0 (= -0.75_x - 0.25_y + 1.00_z)$ 12 次全ては理論解通り

汎用 AE 法節点要素の固有特性はマクスウェル電磁場理論通りであるが、電磁 A 法辺要素の固有特性はマクスウェル電磁場理論違反のパッチテスト・エラー結果である。