

発散定理による交流電場 E 法電磁場厳密解析有限要素から見えた 辺要素固有解析についての緊急検証

久保 文男* 湯山 昭彦（能動的地球探査研究開発コンソーシアム）
野島 洋一（ミューテック）

AC electric field E method by divergence theorem Strict analysis of electromagnetic field Urgent
verification of edge element eigenanalysis seen from finite elements
Fumio Kubo *, Akihiko Yuyama, (Japan Consortium of Earth's Active Monitoring)
Youichi Nojima, (mu-TEC)

The Tokyo Tech seminar aims at research and development of innovative electromagnetic exploration systems. Innovative geophysical exploration requires highly accurate electromagnetic field analysis. We have developed and verified a new electric field E method strict analysis finite element based on the divergence theorem, which can rigorously analyze four Maxwell electromagnetic field simultaneous differential equations. The theoretical characteristics of the new electric field E method hexahedral element and the electromagnetic vector A method hexahedral side element were compared and verified by element eigenvalue analysis. The electromagnetic vector A method side finite element detected a fatal spurious error for the eigenvalues and the eigenvectors. The cause of the edge finite element error and the countermeasures are theoretically considered.

キーワード：電磁場解析，有限要素法，辺要素，固有値，スプリアスエラー，物理探査，
(Electromagnetic field analysis, finite element method, edge element, eigenvalues, spurious error, geophysical exploration)

1. 要旨

東工大セミナーでは、革新的な電磁探査システムの研究開発を目的としている。革新的物理探査には、高精度な電磁場解析が必要である。4本のMaxwell電磁場連立微分方程式を厳密解析出来る、発散定理による新しい電場E法厳密解析有限要素Maxwel8を開発検証した。新しい電場E法六面体要素と電磁ベクトルA法六面体辺要素の理論的特性を要素固有値解析により比較検証した。電磁ベクトルA法辺有限要素は、固有値と固有ベクトルについて致命的なスプリアス・エラーを検出した。辺有限要素エラー原因と対策を理論的に考察した。

2. ガウス発散定理による電場 E 法厳密解析有限要素 Maxwel8 の開発

Maxwell 電磁場方程式は、連立微分方程式(1)～式(4)で表される。

$$\text{rot}H = J + \dot{D} \quad \text{アンペール・マクスウェル式} \quad (1)$$

$$\text{rot}E = -\dot{B} \quad \text{ファラデー・マクスウェル式} \quad (2)$$

$$\text{div}B = 0 \quad \text{磁束保存式：磁場には源がない} \quad (3)$$

$$\text{div}D = \rho \quad \text{電荷保存式：電場の源は電荷である} \quad (4)$$

電磁ベクトル A 法では、磁束 B と式(2)の電場 E、式(1)の電流密度 J を次のように仮定する。

$$B = \text{rot}A, \text{rot}E = -\text{rot}\dot{A} \rightarrow E = -\dot{A}, J = J_0 + \sigma E$$

ここで、 J_0 は電線の電流密度 (5)

式(1)～式(5)を代入して、電磁ベクトル A 法の交流運動方程式は次のように表される。

$$\frac{1}{\mu} \text{rotrot}A + \sigma \dot{A} + \varepsilon \ddot{A} = J_0 \quad (6)$$

式(5)の第2式と式(6)の時間微分を代入、電場 E 法の交流運動方程式は次のように表される。また、電場 E 法の交流運動方程式(7)は式(1)と式(2)より直接定式化できる。

$$\frac{1}{\mu} \text{rotrot}E + \sigma \dot{E} + \varepsilon \ddot{E} = -\dot{J}_0 \quad (7)$$

図1の8節点六面体Maxwel8要素の補間関数は次のように表される。

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta)$$

ここで、 $i = 1 \sim 8, \xi, \eta, \zeta$ は要素正規化座標 (8)

式(8)の補間関数から有限要素法定式により、Maxwel8 要素の要素特性行列と荷重項が計算される。

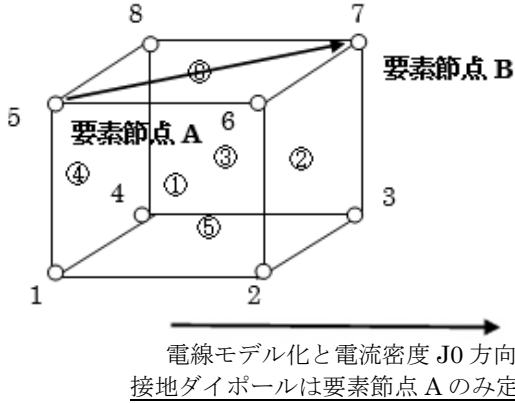


図 1 電線モデル付きの 8 節点六面体 Maxwell8 厳密解析有限要素

Fig. 1. 8-node hexahedron with wire model Maxwell8 exact analysis finite element

ガウス発散定理の境界積分式により電荷保存式(4)を表わし、電荷保存制約の有限要素式を定式化する。電場が保存されると、磁場はファラデー・マクスウェル式から自律的に保存される。また、解析モデルの外部境界は、半無限領域への波動伝播境界となる

$$\text{div} D = \rho \rightarrow \int_V \text{div} D dv = \int_V \rho dv \rightarrow$$

$$\int_S E \cdot nds = Q/\epsilon \rightarrow g^T E - Q/\epsilon = 0 \quad (9)$$

Lagrange 未定乗数法により電荷保存制約式を表わし、未定乗数 λ を消去して要素行列と荷重項へ静的縮合する。静的縮合した要素行列と荷重項から、8 節点六面体有限要素 Maxwell8 の平衡方程式を組立てる。式(10)の電場 E と未定乗数 λ ポテンシャル式の変分を取り、未定乗数 λ を静的縮合した有限要素平衡式を表わす。Maxwel8 要素は、Maxwell 電磁場方程式(1)～式(4)を厳密解析できる有限要素である。

$$L(E, \lambda) = \frac{1}{2} E^T C E + \lambda (g^T E - Q/\epsilon) \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} C & g \\ g^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q/\epsilon \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} C & g \\ g^T & -1/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q/\epsilon \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \alpha g^T E - \alpha Q/\epsilon \quad (11)$$

$$[C + \alpha g g^T] \{E\} = (\alpha Q/\epsilon) \{g\} \rightarrow [C_e] \{E\} = (\alpha Q/\epsilon) \{g\} \quad (12)$$

3. 新しい Maxwell8 要素①と辺有限要素②の要素固有値解析の比較検証

新しい電場 E 法六面体有限要素①と広く利用されている電磁ベクトル A 法六面体辺有限要素②について、等方性要

素固有値解析(図 2)により基本特性を比較検証した。

$$[C_e] \{\phi\} = \lambda \{\phi\} \rightarrow [C_e] \{\phi\} + \lambda [-1] \{\phi\} = 0$$

A 法辺有限要素②は、固有値と磁場固有ベクトルについて致命的なスプリアス・エラーを検出した。そのエラー原因について理論的に考察した。等方性体の異方性固有値は、有限要素結合の定義順が変わると、同じ解析モデルでも異なる電磁場応答となる。

表 1 要素固有値と固有値検証

Table 1. Element eigenvalues and eigenvalue validation

① 新六面体有限要素 発散定理による電場 E 法厳密 解析要素	② 一般六面体辺有限要素 電磁ベクトル A 法のソリッド 辺要素
EigenValueID= 1 3.39D-10 EigenValueID= 2 6.02D-10 EigenValueID= 3 8.37D-10 EigenValueID= 4 1.16D-09 EigenValueID= 5 1.60D-09 EigenValueID= 6 2.37D-09 EigenValueID= 7 1.11D+00 EigenValueID= 8 1.11D+00 EigenValueID= 9 1.11D+00 EigenValueID=10 3.33D+00 EigenValueID=11 3.33D+00 EigenValueID=12 3.33D+00 EigenValueID=13 3.33D+00 EigenValueID=14 3.33D+00 EigenValueID=15 3.33D+00 EigenValueID=16 5.00D+00 EigenValueID=17 5.00D+00 EigenValueID=18 5.00D+00 EigenValueID=19 5.00D+00 EigenValueID=20 5.00D+00 EigenValueID=21 5.00D+00 EigenValueID=22 5.00D+00 EigenValueID=23 5.00D+00	EigenValueID=1 3.44699D-08 EigenValueID=2 3.46147D-08 EigenValueID=3 -3.68937D-08 EigenValueID=4 3.98463D-08 EigenValueID=5 6.04539D-08 EigenValueID=6 1.38419D-07 EigenValueID=7 1.38419D-07 EigenValueID=8 7.95773D+08 EigenValueID=9 7.95773D+08 EigenValueID=10 1.59155D+09 EigenValueID=11 1.59155D+09 EigenValueID=12 1.59155D+09
1 次-6 次固有値は波動ゼロ・エネルギー剛体モード 6 個が理論通り求まる。 7 次以降は等方性固有値の三重根ペアとして理論通り正しく求まる。 この要素は電磁場が正しく解析できる。	1 次-7 次はゼロ・エネルギーのゼロ固有値である。 ゼロ固有値の理論解は 6 個 7 次はスプリアス固有値である。8 次以降は二重根ペアと三重根ペアである。等方体が異方性非対称応答の Fem 定式化エラーである。

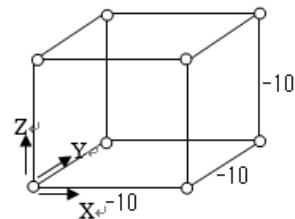


図 2 要素固有値検証の正立方体形状の六面体有限要素と辺要素

Fig. 2. Hexahedron finite element and edge element of regular cube shape of element eigenvalue verification

4. 電磁ベクトル A 法辺有限要素固有値解析のスプリアス・エラー理論的分析

辺要素スプリアス・エラー(1):電磁場有限要素のゼロエネルギー固有値個数

Maxwell 方程式において、交流の電場 E と磁場 H の基本運動は回転演算子 rot で表される。

$$rotE, rotH \rightarrow rotrotA \quad (13)$$

電磁場運動が x, y, z 方向の並進運動 3 成分と xy, yz, zx 面の純せん断運動 3 成分は、ゼロエネルギー運動である。

$$\begin{aligned} rotE_T = 0, rotA_T = 0, \\ rotE_S = 0, rotA_S = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

理論式(14)よりゼロエネルギーに対応するゼロ固有値の個数は計 6 個である。

辺要素スプリアス・エラー(2):電磁ベクトル A 法辺有限要素ガウス積分のエラー原因分析

構造解析や流体解析では、有限要素改善法として「低減数値積分法」が提案されている。低減数値積分法は、ガウス数値積分(積分精度は $2N-1$ 次関数迄)ランク落ちによる「Hourglass mode(砂時計モード)」のゼロエネルギー疑似固有値を内在することが判明している。辺要素の辺補間関数仮定は低減積分法定式の一つである。辺有限要素②固有値解析の 5 次と 6 次固有値は、Hourglass mode のゼロエネルギー疑似固有値である。

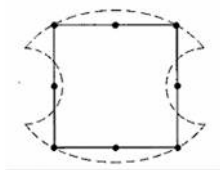


図 3 スプリアスエラーのゼロエネルギー'砂時計'要素固有モード

Fig. 3. The spurious zero-energy 'Hourglass' mode

辺要素スプリアス・エラー(3):電磁ベクトル A 法辺有限要素定式エラーの分析

「ポアンカレの補題 P1P2」から電磁ベクトル A ポテンシャル ϕ が導入される。

P1: $\text{div}B=0$ を満たすとき、3 次元ベクトル空間上のベクトル値関数 $A(x)$ が存在し、 $B=\text{rot}A$ が成り立つ

注)電荷保存式 $\text{div}D=\rho$ は補題 P1 が成り立たない

P2: $\text{rot}E=0$ を満たすとき、3 次元ベクトル空間上のスカラー関数 $\phi(x)$ が存在し、 $E=-\text{grad}\phi$ が成り立つ

電磁場において、 ϕ は直流電場を表すスカラーポテンシャル、 A は直交流磁場を表すベクトル関数である。電磁ベクトル A 法六面体辺有限要素の補間関数を次のように定義している。 m は 1~12 の六面体の辺番号を表している。

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \frac{l_m}{8} \begin{Bmatrix} \{(1+\eta_m\eta)(1+\zeta_m\zeta)\text{grad}\xi\partial A_m/\partial\xi\} \\ \{(1+\zeta_m\zeta)(1+\xi_m\xi)\text{grad}\eta\partial A_m/\partial\eta\} \\ \{(1+\xi_m\xi)(1+\eta_m\eta)\text{grad}\zeta\partial A_m/\partial\zeta\} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} m=1\sim4(\xi\eta) \\ m=5\sim8(\eta\zeta) \\ m=9\sim12(\zeta\xi) \end{matrix} \quad (15)$$

六面体辺要素の辺番号と辺節点番号は次の様に表される。

ξ 辺番号	辺節点番号	η 辺番号	辺節点番号	ζ 辺番号	辺節点番号
1	1-2	5	2-3	9	1-5
2	4-3	6	1-4	10	2-6
3	5-6	7	6-7	11	3-7
4	8-7	8	5-8	12	4-8

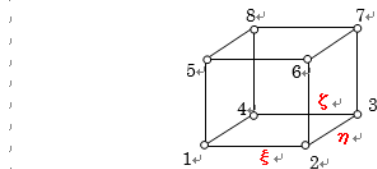


図 4 六面体辺有限要素の $\xi \eta \zeta$ 辺座標

Fig. 4. $\xi \eta \zeta$ side coordinates of hexahedral solid finite elements

式(15)の辺要素補間関数のヤコビアン逆変換は、正規化座標 微分重ね合わせの微分評価位置に整合性が無い、即ちヤコビアン変換を恣意的に解釈したエラーである。この疑似ヤコビアン変換エラーにより、等方性電磁場の固有値解析が異方性固有値となるエラー原因と考えられる。

辺補間式(15)は、ベクトル A をスカラーポテンシャル ϕ と同様に勾配変換する「ポアンカレの補題 P1P2」を逸脱した理論的間違いがある。

$$\begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{Bmatrix} \rightarrow \neq \rightarrow \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ヤコビアン式(16)は次式で定義される。

$$[J(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (17)$$

辺要素の擬似ヤコビアン変換は、次のように仮定している。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \rightarrow [\tilde{J}] \neq [J] \quad (18)$$

式(18)の擬似ヤコビアン変換では、変換誤差エラーにより磁束式(19)は $B = \text{rot}A \neq 0$ となる。電磁ベクトル A 法の磁束式に式(16)を代入する。

$$B = \text{rot}A \rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial A/\partial x \\ -\partial A/\partial y \\ -\partial A/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

磁束式(19)はベクトル恒等式より磁束密度 B がゼロとなる。従って、A 法辺有限要素定式は磁束 B 非回転となり、磁場回転運動の Maxwell 電磁場理論と矛盾する。因みに、直流電磁場応答は Aφ 定常法により解析される。辺有限要素固有値エラー(剛体モード数と等方性三重根ペア無し)は、辺要素定式(19)の磁束ゼロ・エラーが原因である。

5. 電磁場有限要素の固有値解析検証に向けた緊急点検支援と理論情報発信の委員会設置提案

東工大セミナーでは電磁場有限要素の緊急点検について、要素固有値検証支援メニューを提供する。

無償タイプ A : 電磁場有限要素の実数固有値解析プログラムを提供する。

有償タイプ B : 要素行列を東工大セミナー側で固有値解析により検証し報告する。発散定理による Maxwell 厳密有限要素コンサルティングを提供する。

問合せ先: 東工大セミナー世話人
久保 E メール kubo120@gmail.com

E メール表題: タイプ A 又はタイプ B、電磁場有限要素の固有値検証サポート

E メール本文: 所属組織内容とサポート依頼内容を簡潔に記述する。タイプ B の場合は、検証する要素行列格納ファイルを添付する。

東工大セミナーでは、電磁場辺有限要素の緊急検証支援を計画している。電気学会と東工大セミナーとのアライアンスにより公的な「電磁場解析標準化検証委員会(仮)」を組織化して、辺要素緊急検証も含めて高精度電磁波解析の標準化研究開発とその普及活動を提案する。東工大セミナーにおいて研究開発した本件知財は、本委員会へ管理運営を委託する。

委員会設立: 電気学会と東工大セミナー協業の「電磁場解析標準化検証委員会(仮)」の提案

本委員会より「辺要素緊急検証」を国内国外へ情報発信する。電磁場有限要素の緊急検証、交流・直流の電磁場厳密解析の交流電場 E 法と直流電磁 Aφ 法についての国際 Conference や研究開発を企画実施する。

本論文の Gauss 発散定理と Lagrange 未定乗数法による保存則厳密制約有限要素法は、電磁場だけでなく非圧縮性の構造や流体の新しいロバストな汎用的解析理論である。有限要素法では「Natural boundary conditions(自然境界条件)」が自動的に付随するために、波動伝達遮断境界や断熱境界などの境界条件となる。電荷保存式のガウス発散定理では、電場の流入流失面法線総和とゼロの制約条件が拘束されるために、要素外部境界は要素間の波動法線伝達条件となる。東工大セミナーの熊澤先生は、(発散定理)六面体表面層を数値的無反射吸収層として設定できる。厳密に無反射にすることは簡単ではないが、実務実効的には実現できると提案している。

[謝辞]

東大・名大熊澤峰夫先生、北大五十嵐一先生からは本理論提案へのコメント頂き、産総研丸井敦尚様からは本研究資金を提供頂き、深く感謝申し上げます。

文 献

- (1) O.C.Zenkiewicz and R.L.Taylor 'The Finite Element Method Volume 1', McGRAW-HILL, 1990.
- (2) Thomas Jr. Hughes 'The finite element method' 240p. Examples Elements with Spurious Zero-energy 'Hourglass' Modes, PRENTICE-HALL, 1992.
- (3) 本間、五十嵐、川口、'数値電磁気学: 基礎と応用'、2002.
- (4) 五十嵐、亀有、加川、西口、Bossavit、'新しい計算電磁気学: 基礎と応用'、2003
- (5) Wikipedia、'マクスウェルの方程式'、'電磁ポテンシャル'、'発散定理'、2020