

電磁ベクトル A 法辺要素と汎用 AE 法電場保存節点要素の比較検証評価

2023/10/14 JCEAM 久保, 湯山, μ TEC 野島

1. 電磁場要素固有特性比較検証の問題設定

電磁場周波数応答の有限要素固有特性解析は次式で計算される。

$$[C_a(\frac{1}{\mu}, -\varepsilon\omega^2)]\{\phi_A\} = \lambda_A\{\phi_A\} \quad \text{電磁ベクトル A 法辺要素(強形式、}\mu\text{ TEC)} \quad (1)$$

$$[C_{ae}(\frac{1}{\mu}, -\varepsilon\omega^2) + \alpha g g^T]\{\phi_{AE}\} = \lambda_{AE}\{\phi_{AE}\} \quad \text{汎用 AE 法電場保存節点要素(弱形式、JCEAM)} \quad (2)$$

$[C_a]$ と $[C_{ae}]$ は電磁 A 法辺有限要素と汎用 AE 法(電磁 A 法解析と電場 E 法解析は同一結果、荷重項は異なるが同じ行列成分の周波数応答式である)節点有限要素の周波数応答要素マトリックス、 $[\alpha g g^T]$ は発散定理有限要素法の電場保存制約要素マトリックスを表わしている。有限要素定式は、「Maxwell 電磁場方程式の発散定理有限要素法による厳密解析理論説明書」式(18)～式(25)に記述した。式(1)と式(2)により要素基本特性の固有値 λ_A, λ_{AE} の三軸等方性三重根ペアと固有モード $\{\phi_A\}, \{\phi_{AE}\}$ の電場保存発散ゼロを比較検証する。

固有特性検証は図 1 に示す正立方体形状を六面体有限要素でモデル化する。解析パラメータの真空電磁場物性と周波数応答 ω は下記に示す。

電磁場物性：XYZ 三軸等方性の真空電磁場

透磁率： $\mu = 1.257e^{-7} N \cdot A^{-2}$

誘電率： $\varepsilon = 8.854e^{-12} F \cdot m^{-1}$

電気伝導率： $\sigma = 0.0$

応答周波数： $\omega = 2\pi \times 1.0e6 Hz$

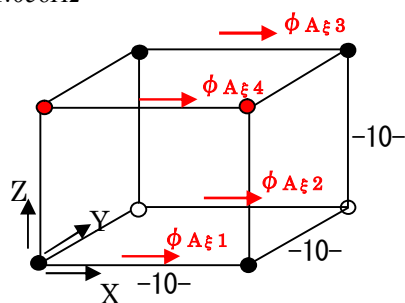


図 1 六面体有限要素モデル幾何形状と辺要素 ξ 辺に沿う固有電磁モード $\phi_{A\xi 1} \sim \phi_{A\xi 4}$ (辺一定仮定)

電磁ベクトル A 法辺要素式(1)と汎用 AE 法発散定理節点要素式(2)の理論ポイントと検証評価項目を示す。

有限要素タイプ	定式化理論ポイント	検証評価項目
電磁ベクトル A 法 辺要素	電磁 A 法運動平衡有限要素式の回転 $\text{rot}A$ について、ストークス定理の辺 A ゼロ自明解より、陽に電場保存を制約する	電場保存ゼロ自明エラーのスプリアスゼロ自明解
汎用 AE 法電場保存 節点要素	AE 法周波数応答有限要素式の電場発散定理と未定乗数法からの $[\alpha g g^T]$ 行列により、陰に電場保存発散を制約する	電場・電荷・磁束発散ゼロ保存のロバスト厳密解

電磁ベクトル A 法辺要素の定式化理論ポイントは、電気学会セミナー説明資料(五十嵐先生)を引用した。

辺要素エラーは、要素節点を介して隣接する辺の節点変数電磁ベクトル A との連成を無視した、辺毎に独立一定応答とした非トポロジ的辺要素陽制約定式が原因である。保存式は弱形式制約式により拘束する。

2. 電磁ベクトル A 法辺要素と汎用 AE 法電場保存節点要素の要素固有特性解析による比較検証評価

電磁ベクトル A 法辺要素と汎用 AE 法電場保存節点要素の固有特性固有値と固有モードを検証する。

表 1 電磁 A 法辺要素と汎用 AE 法節点要素の固有特性比較検証と評価

電磁 A 法辺要素	要素固有特性解析の理論検証と評価	
	固有値 λ_A	等方性三重根ペア・エラーの異方性固有値応答
電場保存の汎用 AE 法節点要素	固有モード ϕ_A	電場保存発散エラーのゼロ自明解を陽に制約
	固有値 λ_{AE}	電磁場理論通り 三重根ペアの三軸等方性固有値応答
	固有モード ϕ_{AE}	電磁場理論通り 電場・磁束保存発散ゼロを陰に制約

次数	三軸等方性三重根ペア固有値検証		電場保存式の固有モード発散ゼロ検証	
	電磁 A 法辺要素 λ_A	汎用 AE 法節点要素 λ_{AE}	電磁 A 法辺要素 $\{\phi_A\}$	汎用 AE 法節点要素 $\{\phi_{AE}\}$
1	2. 74156D+08	4. 85475D+03	-1. 02945D-10	-2. 71484D-16
2	8. 22467D+08	4. 85475D+03	2. 14235D-09	-2. 04697D-16
3	8. 22467D+08	4. 85475D+03	1. 90920D-10	1. 04083D-16
4	8. 22467D+08	4. 36927D+04	-1. 62840D-09	-2. 81025D-16
5	1. 06993D+09	4. 36927D+04	-4. 41834D-09	2. 86229D-16
6	1. 06993D+09	4. 36927D+04	-2. 87403D-10	2. 47198D-17
7	2. 41401D+09	8. 85557D+05	4. 66254D-08	3. 46945D-17
8	2. 41401D+09	8. 85557D+05	9. 58759D-09	-7. 97973D-17
9	2. 41401D+09	8. 85557D+05	-3. 19856D-08	-3. 90313D-18
10	2. 46740D+09	2. 65667D+06	1. 01436D+02	-1. 04083D-16
11	2. 46740D+09	2. 65667D+06	9. 88558D+01	4. 85723D-17
12	2. 46740D+09	2. 65667D+06	9. 97378D+01	-1. 01915D-17
13		2. 65667D+06		-6. 54858D-17
14		2. 65667D+06		1. 72605D-16
15		2. 65667D+06		-2. 57498D-18
16		3. 99229D+06		5. 55112D-17
17		3. 99229D+06		-9. 36751D-17
18		3. 99229D+06		-2. 49366D-17
19		3. 99229D+06		2. 08167D-17
20		3. 99229D+06		3. 81639D-17
21		3. 99229D+06		5. 55112D-17
22		3. 99229D+06		4. 16334D-17
23		3. 99229D+06		-1. 66533D-16
24		2. 67123D+13		-6. 00000D-01

固有モード発散ゼロ検証の上表黄色マーカ表示の 1 次モードについて、発散成分と発散総和をモード正規化して比較検証する。2 次以降の固有モード電場保存発散についても同様の結果である。

有限要素タイプと要素定式化	電場保存式の固有 1 次モード発散成分総和ゼロ正規化検証			
電磁 A 法辺要素：磁束保存式のストークス定理より電場保存ゼロ自明解を陽に制約、 <u>モード正規化の通り電場保存発散エラー</u>	$\int_S \phi_A \cdot ds \approx 0$	$\int_{S_\xi} \phi_{A\xi} ds_\xi$	$\int_{S_\eta} \phi_{A\eta} ds_\eta$	$\int_{S_\zeta} \phi_{A\zeta} ds_\zeta$
	-1. 02945D-10 1. 56	-3. 77864D-11 0. 57	3. 80251D-13 -0. 01	-6. 55392D-11 1. 0
電場保存の汎用 AE 法節点要素：電場保存発散ゼロを陰に制約、 <u>モード正規化の通り固有モード電場は回転運動保存される</u>	$\text{div} \phi_{AE} = 0$	$d\phi_{AE\xi} / dx$	$d\phi_{AE\eta} / dy$	$d\phi_{AE\zeta} / dz$
	-2. 71484D-16 0. 0	-1. 62094D-08 -0. 75	-5. 31087D-09 -0. 25	2. 15203D-08 1. 0

3. 比較検証評価と辺要素エラー対策

電磁ベクトル A 法辺要素と汎用 AE 法節点要素の比較検証評価から、電磁 A 法辺要素の致命的未解決エラー①～③についての固有特性解析検証結果を例示する。

① 辺要素の有限要素定式エラー

辺要素固有特性の 2 頁表 1 中 2,4 列に示す固有値と固有モードエラーは、ストークス定理電場保存制約による辺要素仮定甲乙が原因である。電場・電荷保存発散定理による汎用 AE 法節点要素は、表 1 中 3,5 列の様に電磁場理論通り、電磁 A 法と電場 E 法とも同じ固有値と固有モード結果である。

② 辺要素の電磁場励起荷重定式エラー → μ TEC 方法を聞く

電磁場基本現象アンペール法則解析の電流が流れる電線モデル化の辺要素定式化が出来ていない。

電磁 A 法運動方程式 $\frac{1}{\mu} \text{rot} \text{rot} A + \sigma \dot{A} + \varepsilon \ddot{A} = J_0$ 右辺の電線電流 J_0 による磁場を励起する荷重項である。

辺要素は電線電流荷重が負荷されないで電磁場解析系を励起出来ない(磁場の源は電流)。

③ 辺要素の節点磁場定式エラー → μ TEC 方法を聞く

辺要素各辺中央の電磁ベクトル A から節点磁場 H の計算方法定式化が出来ていない。

有限要素法では、要素内部ガウス積分点の磁場 $H(\xi, \eta, \zeta) = \text{rot} A / \mu$ を計算して、要素節点へ外挿し共有節点について平均化するが、辺要素の電磁 A 辺一定分布仮定と理論整合性がない。

辺要素エラーについて有限要素定式を説明する。辺要素は、磁束保存式から発散定理→ストークス定理より電磁ベクトル A を陽に制約する。一方、汎用 AE 法節点要素は電場・電荷保存発散定理を陰に制約する。

$$\text{磁束保存式: } \text{div} B = 0 \rightarrow \int_V \text{div} B dv = 0 \rightarrow \int_S B \cdot nds = 0 \rightarrow \int_S \text{rot} A \cdot nds = 0 \rightarrow \oint_S A \cdot ds = 0 \quad (3)$$

$$\text{電荷保存式: } \text{div} D = \rho \rightarrow \text{div} A = i\rho / \omega\varepsilon \quad \uparrow \text{発散定理} \quad \uparrow \text{ストークス定理} \quad (3')$$

六面体辺要素定式は 1-4 ξ 辺、5-8 η 辺、9-12 ζ 辺に沿った電磁ベクトル A 分布を一定と仮定(甲)する。

$$\oint_S A \cdot ds = 0 \approx \text{仮定甲} \approx \sum_{k=1}^4 A_{\xi k} l_{\xi k} + \sum_{l=5}^8 A_{\eta l} l_{\eta l} + \sum_{m=9}^{12} A_{\zeta m} l_{\zeta m} = 0 \quad (4)$$

辺要素では式(4)の電磁 A 保存式を次の様にゼロ自明解により陽に仮定(乙)する。

$$\sum_{k=1}^4 A_{\xi k} l_{\xi k} + \sum_{l=5}^8 A_{\eta l} l_{\eta l} + \sum_{m=9}^{12} A_{\zeta m} l_{\zeta m} = 0 \approx \text{仮定乙} \approx (\sum_{k=1}^4 A_{\xi k} l_{\xi k} = 0, \sum_{l=5}^8 A_{\eta l} l_{\eta l} = 0, \sum_{m=9}^{12} A_{\zeta m} l_{\zeta m} = 0) \approx 0 \quad (5)$$

辺要素エラーは、式(4)の電磁ベクトル A の辺分布一定仮定甲による数値積分ランク落ちスプリアスエラーと式(5)のゼロ自明解の仮定乙の複合原因である。要素固有特性式(2)左辺の $[agg^T]$ 行列は、汎用 AE 法の電場保存制約要素マトリックスを表わしている。辺要素は甲乙仮定による非理論的定式であるが、汎用 AE 法は恣意的仮定が一切無い厳密電磁場要素である。電磁 A 法辺要素エラー①～③は甲乙仮定が原因であり、汎用 AE 法節点要素は電磁場理論通りのロバスト解析結果が求まる。

1)電磁 A 法辺要素の固有特性解析固有値と固有モードのエラーは、辺要素定式仮定甲乙が原因である。磁束発散定理→ストークス定理からのゼロ自明解による見かけ上で、電磁 A 保存式の発散総和ゼロではない。電磁 A 法辺要素エラーは、電場発散定理と Lagrange 未定乗数法により電場保存発散ゼロ制約により固有特性方程式(2)となり、汎用 AE 法節点有限要素を開発導入して解決できる。

2)汎用 AE 法電場保存節点要素の固有特性解析は、電磁場理論通りの固有値と固有モード結果である。汎用 A 法発散定理節点要素の電場・電荷・磁束は、電磁場理論通り発散ゼロに保存される。

4. 比較検証評価のまとめ

I. 辺要素エラー原因を解明するために、電磁ベクトル A 法の辺要素と節点要素について有限要素法パッチテストにより固有特性を比較検証した。

II. 比較検証表 1 の様に、ストークス定理の辺要素は固有値と固有モード共に理論的エラーであるが、電場保存電磁 A 法節点要素は理論通りロバスト結果である。電場 E 法節点要素も理論通り結果である。電磁 A 法と電場 E 法の電磁場周波数運動方程式電荷保存式、電磁場応答は次式の通り。

$$\frac{1}{\mu} \text{rot} \text{rot} A + \sigma \dot{A} + \varepsilon \ddot{A} = J_0 \quad \& \quad \text{div} A = j\rho / \omega \varepsilon \Rightarrow \quad H = \text{rot} A / \mu, E = -\dot{A} \rightarrow E = -j\omega A \quad (6)$$

$$\frac{1}{\mu} \text{rot} \text{rot} E + \sigma \dot{E} + \varepsilon \ddot{E} = -j\omega J_0 \quad \& \quad \text{div} E = \rho / \varepsilon \Rightarrow \quad \text{rot} E = -\dot{B} \rightarrow H = j\text{rot} E / \omega \mu \quad (7)$$

電磁 A 法電磁場運動方程式(6)を時間微分し、電磁関係式 $E = -\dot{A}$ を代入して電場 E 法運動方程式(7)が求まる。電磁場運動方程式(6)と式(7)は同じ電磁場結果の等価定式であるので、汎用 AE 法とする。

III. 辺要素は、有限要素基本検証パッチテストと有限要素法定式仮定式(4)と式(5)に致命的間違いがある。迅速な対策が必要である。

IV. 汎用 AE 法電場保存節点要素により辺要素エラー対策が出来る。有限要素の電場・電荷保存条件は、

有限要素の電場保存式：ガウス発散定理より、要素面の電場流入流出総和と電荷を平衡に制約

辺要素結果とは全く異なり、電場 xyz 成分が回転運動連成して各要素面への流入流出総和と要素電荷を平衡に制約する。汎用 AE 法により正確でロバストな電磁場有限要素法理論解ソルバーが実用化出来る。

V. 辺要素磁束保式(3)は、ベクトル恒等式より自明ゼロであるので、ストークス定理による自明ゼロ拘束は必要無い。

$$\text{div} B = 0 \rightarrow \text{div} \text{rot} A \Rightarrow 0 \quad \text{ベクトル恒等式より自明ゼロ} \quad (8)$$

辺要素ストークス定理の拘束式(3)は、ベクトル恒等式自明ゼロの意味の無い定式である。

理論的に正しい有限要素平衡方程式は、汎用 AE 法運動方程式と磁束保式(6)と式(7)をガウス発散定理・未定乗数法から、周波数応答平衡方程式を節点定式化する。